

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

25 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1. [0.5] Έστω  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  και  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$   
Εξετάστε αν η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Θέμα 2. [0.5] Για ένα μη κενό και φραγμένο  $V \subset \mathbb{R}^n$  γνωρίζετε ότι υπάρχει το  $\int_V 1 \, d\mathbf{x}$ . Ποιές ιδιότητες πρέπει να έχει το σύνολο  $V$  και γιατί;

Θέμα 3. [2] Αν  $V_n(\mathbb{R})$  ο όγκος της μπάλας κέντρου  $\bar{0}$  και ακτίνας  $R > 0$  στον  $\mathbb{R}^n$ , δείξτε ότι για  $n \geq 3$  ισχύει  $V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1)$ . [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε δυο φορές την Αρχή του Cavalieri και, αφού δείξετε ότι  $V_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n V_n(1)$ , πολικές συντεταγμένες.]

Θέμα 4. [1] Εξετάστε αν η ακολουθία συναρτήσεων  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , συγκλίνει κατά σημείο και δώστε το όριο της, αν αυτό υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή εξετάστε αν η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θέμα 5. [6] Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = y$  και το σύνολο

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], x^2 \leq y\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

(α) [0.4+0.4] Σχεδιάστε το  $B$  και, στο επίπεδο  $Oxyz$ , την τομή του γραφήματος της  $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$  με το επίπεδο αυτό.

(β) [0.2+0.4] Δείξτε ότι το  $B$  είναι κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες  $Ox$  και  $Oy$ .

(γ) [0.4+0.4] Αν  $\Gamma_1, \Gamma_2$  τα θετικά προσανατολισμένα τμήματα του  $\partial B$ , έτσι ώστε  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial B$  και  $\Gamma_1$  το τμήμα από το  $(1, 1)$  στο  $(-1, 1)$ , υπολογίστε το μήκος του  $\Gamma_1$  και το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma_2} (y, x) \cdot d(x, y).$$

(δ) [0.4] Υπολογίστε το  $\int_{\partial B} (x^3, (x-y)y) \cdot d(x, y)$ , όπου  $\partial B$  θετικά προσανατολισμένο.

(ε) [0.4] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_B f(x, y) d(x, y)$ .

(στ) [1] Αν

$$B' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] : y \leq -x^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\},$$

αποδείξτε χωρίς να υπολογίσετε ότι

$$\int_{B'} f(x, y) d(x, y) = - \int_B f(x, y) d(x, y).$$

(ζ) [0.4+0.2] Δείξτε ότι το σύνολο  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο  $Oxy$  και υπολογίστε τον όγκο του  $V$ .

(η) [0.4] Υπολογίστε το  $\int_{\partial V} (x, y, z) \cdot \bar{n} \, d\sigma$ , όπου  $\bar{n}$  το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο  $\partial V$ .

(θ) [0.6] Υπολογίστε το εμβαδό της επιφάνειας  $D = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B\}$ .

(ι) [0.4] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_{\partial D} (x^2, y^2 z, yz^2) \cdot d(x, y, z)$ .